PENYELESAIAN PERSAMAAN LINEAR-NON LINEAR DAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL DENGAN METODE KESAMAAN

Abraham Salusu
abraham_salusu@yahoo.com
Program Studi Pendidikan Matematika
Universita Kristen Indonesia Toraja

ABSTRACT

The solution of an equation either in the form of linear, non linear, or differential equation can be done by using formulas or rules for all those equations. Equality method is a simple form of linear, non linear, and differential equation since this method does not need so much knowledge of theorem of those equations. Equality method only places a form of equation in an original form where the sum has to be the same and fixed always.

***Keyword**: Linear equation, non linear, differensial, equality*

ABSTRAK

Penyelesaian suatu persamaan dalam bentuk persamaan linear, non linear atau persamaan differensial selama ini dapat dilakukan dengan menggunakan rumus atau aturan-aturan yang berbeda bagi semua jenis persamaan. Metode kesamaan merupakan suatu bentuk yang sederhana untuk penyelesaian persamaan linear – non linear maupun persamaan differensial, karena metode ini tidak memerlukan banyak pengetahuan tentang teorema persamaan differensial maupun persamaan non linear. Metode kesamaan hanya mengusahakan bentuk persamaan berada dalam bentuk asli yaitu jumlah harus selalu tetap.

***Kata kunci** : Persamaan linear, non linear, differensial, kesamaan.*

PENDAHULUAN

Penyelesaian persamaan linear – non linear adalah mencari titik potong fungsi dengan sumbu X demikian juga penyelesaian persamaan differensial adalah mencari fungsi yang memenuhi persamaan. Penyelesaian persamaan differensial maupun mencari akar suatu persamaan dapat dilakukan dengan berbagai metode, namun dalam tulisan ini akan diuraikan dengan menggunakan metode kesamaan. Metode kesamaan adalah suatu metode penyelesaian yang mengusahakan bentuk persamaan tetap dalam bentuk semula . Penyelesaian persamaan tidak memerlukan banyak teori, tetapi hanya menterjemahkan maksud dari persaman dan mengusahakan tetap berada dalam bentuk yang selalu sama.

PENYELESAIAN PERSAMAAN

Penyelesaian Persamaan Polinomial.

Untuk lebih memahami tentang penyelesaian persamaan polinolmial maka berikut diberikan beberapa contoh penyelesaian antara lain :

a. menghitung salah satu akar dari persamaan $x^2 + 2x = 6$ dengan memberikan suatu harga pada salah satu suku di ruas kiri misalnya $x^2 = 6$.

Penyelesaian : Cari nilai x yaitu sama dengan $\sqrt{6}$ dan dikalikan dengan 2 yang hasilnya seperti pada kolom kedua. Kolom pertama dan kolom kedua dijumlahkan dan ternyata lebih besar dari 6 karena itu selesihnya digunakan sebagai pengurangan pada kolom pertama . Langkah diatas diulangi sampai diperoleh selisih yang cukup kecil misalnya diperoleh selisih 0,00000012 seperti pada tabel berikut.

Tabel 1. Hasil perhitungan $x^2 + 2x = 6$

x^2	$2x$	Jumlah	selisih
6,00000	4,89898	10,89898	-4,89898
1,10102	2,09859	3,19961	2,80039
3,90141	3,95040	7,85181	-1,85181
2,04960	2,86329	4,91289	1,08711
3,13671	3,54215	6,67887	-0,67887
....			
....			
2,70852	3,29151	6,00003	-0,00003
2,70849	3,29150	5,99998	0,00002
2,70850	3,29151	6,00001	-0,00001
2,70849	3,29150	5,99999	0,00001
2,70850	3,29150	6,00000	0,00000

Jadi akarnya adalah $x = \dfrac{3.29151}{2} = 1.645755$; Nilai x^2 dapat dipilih bilangan konstante lainnya, namun batasan bahwa $x^2 + 2x$ haruslah sama dengan 6 .

b. Hitung salah satu akar dari :

$\boldsymbol{x^4 + 2x^3 + x + 3 = 0}$

Pilih $2x^3 = 2$ kolom kedua, kolom ketiga diperoleh dari kolom kedua dan kolom pertama diperoleh dari kolom ketiga dipangkatkan 4. Selanjutnya kolom kelima dijumlahkan ke kolom kedua dan seterusnya. Setelah jumlah mendekati 3 atau selisih sudah cukup kecil, maka iterasi berhenti dan diperoleh nilai $\boldsymbol{x = -1{,}37511}$.

Tabel 2. Hasil perhitungan $x^4 + 2x^3 + x + 3 = 0$

x^4	$2x^3$	x	jumlah	selisih
1	2	1	4	-3-4 = -7
3,393022	-5	-1,35721	-2,96419	-0,03581
3,425465	-5,03581	-1,36044	-2,97079	-0,02921
3,451982	-5,06502	-1,36307	-2,97611	-0,02389
:	:	:	:	:
3,575525	-5,20038	-1,3751	-2,99995	-4,5E-05
3,575567	-5,20042	-1,37511	-2,99996	-3,8E-05
3,575601	-5,20046	-1,37511	-2,99997	-3,1E-05
3,57563	-5,20049	-1,37511	-2,99997	-2,6E-05

Dari tabel di atas pada kolom x ternyata akhirnya di dapat bilangan -1,37511. Jadi akar $x = -1{,}37511$

Penyelesaian Persamaan Non linear.

a). Logaritma : $\ln(x) + x - 2 = 0$

Tabel 3. Hasil penyelesaian $\ln(x) + x - 2 = 0$

ln(x)	x	Jumlah	Selisih
0,69315	2,00000	2,69315	-0,69315
0,26762	1,30685	1,57447	0,42553
0,54950	1,73238	2,28187	-0,28187
0,37191	1,45050	1,82242	0,17758
0,48741	1,62809	2,11549	-0,11549
0,41383	1,51259	1,92642	0,07358
....			
0,44284	1,55713	1,99997	0,00003
0,44286	1,55716	2,00002	-0,00002
0,44285	1,55714	1,99999	0,00001
0,44286	1,55715	2,00001	-0,00001
0,44285	1,55714	2,00000	0,00000

Jadi akarnya adalah $\boldsymbol{x = 1.5569244}$

b). Eksponensial $e^x + 2x = 5$

Tabel 4. Hasil penyelesaian $e^x + 2x = 5$

e^x	$2x$	Jumlah	Selisih
5,00000	3,21888	8,21888	-3,21888
1,78112	1,15449	2,93561	2,06439
3,84551	2,69381	6,53932	-1,53932
2,30619	1,67119	3,97738	1,02262
3,32881	2,40523	5,73404	-0,73404
2,59477	1,90700	4,50177	0,49823
....			
....			
2,88261	2,11739	5,00000	0,00000
2,88261	2,11739	5,00000	0,00000
2,88261	2,11739	5,00000	0,00000
2,88261	2,11739	5,00000	0,00000

$2x = 2{,}1173913$ atau $\boldsymbol{x} = 1{,}058696$

Penyelesaian Persamaan differensial

Penyelesaian Khusus

Untuk menyelesaikan persamaan differensial orde 1 yang berbentuk $f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = g(x)$ dapat dilakukan dengan membuat 2 bagian dari persamaan yaitu $\frac{dy}{dx}$ dan $y = g(x)$ kemudian y disubstitusikan ke persamaan $\frac{dy}{dx}$ dan seterusnya hingga didapat kesamaan seperti berikiut :

a Bila : $g(x) = a\,x^m$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2.$$

Bagilah persamaan tersebut menjadi dua bagian sebagai berikut :

$2y = x^2$ dan $\frac{dy}{dx} = 0$ kedua bagian jumlahnya sama dengan x^2 atau dalam bentuk tabel seperti berikut:

Tabel 5, Penyelesaian khusus $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

$2y$	$\frac{dy}{dx}$
x^2	x
$-x$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0

Kolom sebelah kiri diturunkan setelah dibagi dengan 2 diperoleh x (kolom kanan), kemudian tandanya diubah dan dimasukkan ke kolom kiri dan bila dijumlahkan hasilnya $= x^2$. Kolom kiri $-x$ diturunkan lagi setelah dibagi dengan 2 diperoleh $-\frac{1}{2}$ dan tandanya diubah masukkan kekolom kiri, turunannya 0. Kedua kolom bila dijumlahkan hasilnya tetap x^2. Jadi Penyelesaian khusus adalah:

$$2y = x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad y = \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$$

Persamaan Komplementer

$\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$ diubah menjadi :

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad (1)$$

$$dan \quad 2y = -x \qquad (2)$$

Penyelesaian persamaan $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Penyelesaian kasus (1)

$\boldsymbol{x}$ diintegralkan kemudian dikalikan dengan 2 diletakkan pada kolom kedua, kemudian diubah tandanya dimasukkan dalam kolom pertama dan bila dijumlahkan hasilnya sama dengan nol. Demikian seterusnya hingga didapat:

$$2y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$$

seperti pada tabel berikut :

Tabel 6, Penyelesaian kasus 1,

$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = x$		2y
$-x^2$		x^2
$\frac{2}{3}x^3$		$\frac{2}{3}x^3$
$-\frac{2}{6}x^4$		$\frac{2}{6}x^4$
$\frac{2}{15}x^5$		$-\frac{2}{15}x^5$

Selanjutnya penyelesaian kasus (2)

Kolom bagian kiri dibagi 2 kemudian diturunkan dan diletakkan pada kolom bagian kanan, selanjutnya tandanya diubah dan diletakkan pada kolom bagian kiri dan seterusnya sehingga didapat

$$2y = x - \frac{1}{2}$$

Tabel 7, Penyelesaian kasus 2,

$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

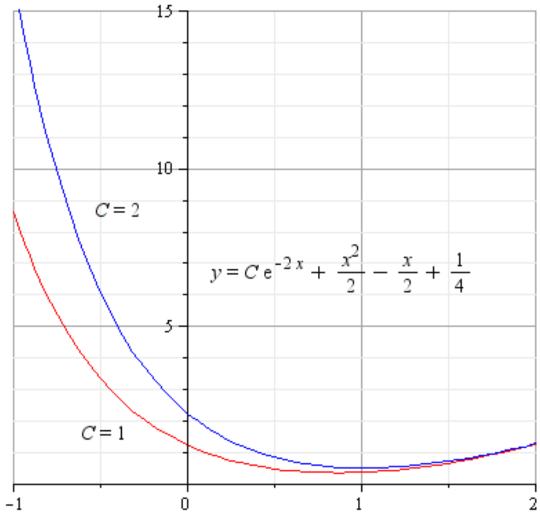
$2y = -x$		$\frac{dy}{dx}$
$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
		0

Penyelesaian kasus 1 dan 2 dijumlahkan diperoleh penyelesaian dari persamaan komplementer yaitu:

$$y = \frac{1}{2} - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$$

Ini adalah bentuk dari Ce^{-2x} dengan C=2.

Demikian juga bila dimisalkan $\frac{dy}{dx} = x^2$ *dan* $2y - -x^2$ akan diperoleh hasil yang sama dan hanya akan memberikan nilai C yang berbeda.



Gambar 1
Penggambaran fungsi

$$y = Ce^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

Jadi Penyelesaian Umum dari Persamaan

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2.$$

adalah $y = Ce^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

b. Bila : $g(x) = e^{mx}$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

Ini dapat dilakukan dengan 2 cara demikian

Tabel 8, Penyelesaian kasus untuk $2y = e^{3x}$

2y	$\frac{dy}{dx}$
e^{3x}	$\frac{3}{2}e^{3x}$
$-\frac{3}{2}e^{3x}$	$-\frac{9}{4}e^{3x}$
$\frac{9}{4}e^{3x}$	$\frac{27}{8}e^{3x}$
$-\frac{27}{8}e^{3x}$	$-\frac{81}{16}e^{3x}$

$2y = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \frac{81}{16} - \dots\dots\right)e^{3x}$

$2y = \left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}}\right)e^{3x}$ $\quad y = \frac{1}{5}e^{3x}$

Tabel 9, Penyelesaian kasus untuk $\frac{dy}{dx} = e^{3x}$

$\frac{dy}{dx}$	2y
e^{3x}	$\frac{2}{3}e^{3x}$
$-\frac{2}{3}e^{3x}$	$-\frac{4}{9}e^{3x}$
$\frac{4}{9}e^{3x}$	$\frac{8}{27}e^{3x}$
$-\frac{8}{27}e^{3x}$	$-\frac{16}{81}e^{3x}$

$2y = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots\dots\right)e^{3x}$

$y = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}}e^{3x} = \frac{1}{5}e^{3x}$

Ternyata hasil kedua kasus sama

Catatan :

$$1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \dots\dots = \frac{1}{1+x}$$

c. Bila : g(x) = sin(ax) atau cos (ax)

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin(2x)$$

Tabel 10, Penyelesaian kasus untuk $2y = \sin(2x)$

2y	$\frac{dy}{dx}$
sin(2x)	cos(2x)
-cos(2x)	sin(2x)
-sin(2x)	-cos(2x)
cos(2x)	-sin(2x)

Tabel 11, Penyelesaian kasus untuk $\frac{dy}{dx} = \sin(2x)$

$\frac{dy}{dx}$	2y
sin(2x)	-cos(2x)
cos(2x)	sin(2x)
-sin(2x)	cos(2x)
-cos(2x)	-sin(2x)

2y =sin(2x)-cos(2x)-sin(2x)+cos(2x)+ sin(2x) -.....

$$y = \frac{1}{2}(\sin(2x) - \cos(2x) - \sin(2x) + \cos(2x) + \sin(2x) - .....)$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - 1 + 1 - 1 + ...)\sin(2x)$$
$$- \frac{1}{2}(1 - 1 + 1 - 1 + ...)\cos(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+1}\sin(2x) - \frac{1}{1+1}\cos(2x)$$

$$y = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

Untuk Tabel 11

$$2y = -\cos(2x) + \sin(2x) + \cos(2x) - \sin(2x) - \text{co}$$
$$+ \sin(2x) + \cos(2x) + ...$$

$$y = \frac{1}{2}(-\cos(2x) + \sin(2x) + \cos(2x) - \sin(2x) \cdot$$
$$+ \sin(2x) + \cos(2x) - \sin(2x) ......)$$

$$y = \frac{1}{2}(-\cos(2x) + \cos(2x) - \cos(2x) + \cos(2.$$
$$+ \frac{1}{2}(\sin(2x) - \sin(2x) + \sin(2x) - \sin(2x)$$

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)\sin(2x)$$

$$y = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Keduanya sama

Penyelesaian Persamaan Simultan

Penyelesaian persamaan simultan dapat dilakukan dengan metode yang sama seperti berikut :

$$\frac{dx}{dt} - y = e^{2\,t}$$

dan

$$\frac{dy}{dt} + 4x = 0$$

Tabel 12, Penyelesaian khusus Persamaan simultan

$\frac{dx}{dt}$	$4x$	$\frac{dy}{dt}$	$-y$	$\frac{dx}{dt}$
e^{2t}				e^{2t}
	$+2e^{2t}$ →	$-2e^{2t}$ →	e^{2t} →	$-e^{2t}$ → *ke kolom (2)*
	$-2e^{2t}$ →	$+2e^{2t}$ →	$-e^{2t}$ →	$+e^{2t}$ → *ke kolom (2)*
	$+2e^{2t}$ →	$-2e^{2t}$ →	$+e^{2t}$ →	$-e^{2t}$ → *dan setgerusnya*

Dari kolom (2) diperoleh

$$4x = 2e^{2t} - 2e^{2t} + 2e^{2t} + ...$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)e^{2t} = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$-y = e^{2t} - e^{2t} + e^{2t}$ Þ $y = -\frac{1}{2}e^{2t}$

Persamaan Komplementer

$$\frac{dx}{dt} - y = 0 \ , \ \frac{dy}{dt} + 4x = 0$$

Misalkan $\frac{dx}{dt} = t$ ...... (1)

dan $-y = -t$ .... (2)

Untuk (1)

Tabel 14, Penyelesaian Persamaan komplementer (1)

$\frac{dx}{dt}$	$4x$	$\frac{dy}{dt}$	$-y$
t	$2t^2$	$-2t^2$	$\frac{2}{3}t^3$
$3-\frac{2}{3}t^3$	$-\frac{2}{3}t^4$	$\frac{2}{3}t^4$	$-\frac{2}{15}t^5$
$\frac{2}{15}t^5$	$\frac{4}{45}t^6$	$-\frac{4}{45}t^6$	$\frac{4}{315}t^7$
$-\frac{4}{315}t^7$	$-\frac{2}{630}t^8$	$\frac{2}{630}t^8$	$-\frac{2}{2835}t^9$
$\frac{2}{2839}t^9$	$\frac{8}{28390}t^{10}$	$-\frac{8}{28390}t^{10}$	$\frac{4}{156145}t^{11}$

$$4x = -1 + 2t^2 - \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{4}{45}t^6 - \tfrac{1}{135}t^8 + \tfrac{4}{14195}t^{10} - \cdots$$

$$y = t - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 - \tfrac{4}{315}t^7 + \tfrac{2}{2835}t^9 - \cdots$$

Untuk (2)

Tabel 15, Penyelesaian Persamaan komplementer (2)

$\frac{dx}{dt}$	$4x$	$\frac{dy}{dt}$	$-y$
0	-1	1	-*t*

$4x = -1$ dan $-y = -t$

Dari penyelesaian (1) dan (2) diperoleh:

$$x = \tfrac{1}{4}\left(-1 + 2t^2 - \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{4}{45}t^6 - \tfrac{1}{135}t^8 + \tfrac{4}{14195}t^{10} - \cdots\right)$$
$$= A\cos(2t)$$

$$y = t - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 - \tfrac{4}{315}t^7 + \tfrac{2}{2835}t^9 - \cdots$$
$$= B\sin(2t)$$

Demikian juga bila dari persamaan:

$\frac{dx}{dt} + 4x = 0$ diambil $\frac{dx}{dt} = t$ dan $4x = -t$

PENUTUP

Penyelesaian Persamaan dengan menggunakan metode kesamaan dapat dilakukan pada Persamaan Differensial maupun Persamaan Differensial Simultan dan juga dalam mencari akar suatu persamaan linear maupun non linear. Metode kesamaan tidak memerlukan banyak teori atau rumus-rumus dan lebih mudah untuk dimengerti, hanya biasanya akan menggunakan waktu yang agak lama. Metode ini justru akan lebih mudah dalam membuat program dalam penyelesaian suatu persamaan.

DAFTAR PUSTAKA

Jeffreys, 1988, The Gauss-Seidel method, Worlfram MathWorld.

Kim, T and Lee. C.O. A Parallel Gauss-Seidel Method Using NR Data Flow Ordering. *Applied Mathematics and Computation, 99(2): 209–220, 1999.*

Salusu, A., 2008 , *Metode Numerik*. Graha Ilmu

Sellappa,S and S. Chatterjee. Cache-Efficient Multigrid Algorithms. *International Journal of High Performance Computing Applications, 18(1):115–133.*