

## PENENTUAN MEDAN SUHU PADA PERUBAHAN FASE ORDE I DENGAN METODE BEDA HINGGA

Enos Lolang<sup>1</sup>  
[enos@ukitoraja.ac.id](mailto:enos@ukitoraja.ac.id)

### ABSTRAK

Apabila suatu fluida mengalami pemanasan sehingga di dalamnya terjadi perubahan fase orde I, maka dalam fluida tersebut akan terbentuk gelembung gas sebagai akibat adanya selisih suhu antara permukaan bahan pemanas dengan fluida itu sendiri. Di sekitar gelembung, terdapat lapisan-lapisan isothermal yang menyatakan tinggi rendahnya suhu fluida pada daerah tersebut, yang dinamakan profil medan suhu. Profil tersebut dapat digambarkan dengan menerapkan pendekatan metode beda hingga terhadap persamaan yang berlaku pada sistem dan selanjutnya dikonversikan ke dalam bahasa pemrograman Turbo Pascal. Berdasarkan data pengukuran, dapat terlihat bahwa semakin jauh dari inti gelembung, profil suhu semakin kabur.

*Kata kunci: gelembung gas, medan suhu, metode beda hingga.*

---

<sup>1</sup> Dosen UKI Toraja

## PENDAHULUAN

### Latar Belakang

Transfer panas di dalam suatu jenis fluida merupakan kajian penelitian yang telah dilakukan dalam berbagai bentuk, baik di laboratorium maupun secara teoritis. Tujuan penelitian juga dimaksudkan untuk penerapan pada berbagai bidang, antara lain dalam penggunaan air sebagai bahan pendingin mesin, atau dalam sistem pendinginan reaktor tenaga nuklir. Karakteristik air dalam hal ini sangat penting untuk menentukan dimensi ketebalan penampung air yang harus digunakan, sampai jangka waktu maksimal yang diperbolehkan sebelum bahan fluida harus diperbaharui.

Karakteristik tersebut di atas akan lebih muda dijelaskan apabila dapat dipahami mekanisme terjadinya gelembung akibat panas (turbulensi termal) di dalam fluida. Munculnya gelembung pada suhu kritis tertentu, ditandai dengan adanya ruangan berpermukaan cembung yang membatasi suatu satuan volume gas dengan fluida yang ada di sekelilingnya. Batas gelembung tersebut terbentuk sebagai akibat dari gradien termal, dan selanjutnya gradien termal tersebut mengakibatkan terjadinya turbulensi di dalam fluida. Semakin tinggi gradien termal yang terjadi, semakin tinggi frekuensi terjadinya turbulensi, sampai tercapai tingkat panas yang dinamakan titik didih. Jadi, gelembung muncul pada saat tertentu bukan diakibatkan oleh karena proses dalam kesetimbangan termal.

Penelitian Mach-Zehnder dengan menggunakan interferometer laser He-Ne memperlihatkan bahwa pola medan suhu di sekeliling gelembung bukanlah suatu proses isothermal. Bidang batas gelembung dengan fluida di sekelilingnya memperlihatkan adanya perbedaan suhu dari bagian bawah sampai bagian gelembung paling atas.

Penggunaan interferometer He-Ne belum dapat diterapkan pada saat penelitian ini dilakukan karena peralatan tersebut tidak tersedia. Pendekatan yang dapat dilakukan adalah pengukuran manual dengan menggunakan

termometer, kemudian menerapkan nilai awal dan syarat batas terhadap persamaan diferensial parsial yang berseuaian dengan masalah transfer panas dalam fluida.

### I.2. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan medan suhu dalam lingkup perubahan fase orde I, dengan menggunakan metode beda hingga.

### I.3. Batasan Masalah

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan bahan aquades sebagai fluida. Pengamatan dilakukan pada saat suhu mendekati titik didih, yaitu pada suhu  $92^{\circ}\text{C}$ . Transfer panas dalam lingkungan fluida terjadi secara konveksi alami, dan laboratorium dikondisikan pada suhu konstan.

## TINJAUAN PUSTAKA

### Dasar-Dasar Teori

Proses pendidihan terjadi sebagai akibat dari kontak antara dua permukaan yang memiliki suhu yang berbeda. Dalam penelitian ini, permukaan yang dimaksudkan adalah permukaan benda padat sebagai bahan pemanas, dan permukaan fluida sebagai bahan penelitian. Pemanasan dilakukan terhadap benda padat, sehingga transfer panas terjadi dari benda padat tersebut ke fluida yang ada di sekitarnya. Kuantitas transfer panas ini dinamakan fluks panas.

Jika fluks panas yang berpindah dari bahan padat diproyeksikan terhadap selisih suhu pada jarak tertentu, maka didapatkan suatu grafik yang menandakan daerah pendidihan dengan yang terdiri atas lima fase.

*Fase I* ditandai dengan adanya fluida konveksi bebas yang menimbulkan gerak (arus) pada permukaan fluida. Lapisan fluida yang bersentuhan dengan permukaan bahan pemanas akan bergerak menuju permukaan dan menguap. Pada *Fase II*, gelembung gas mulai terbentuk pada permukaan pemanas. Gelembung-gelembung ini dilepaskan menuju permukaan dan terpecah sebelum mencapai permukaan. Frekuensi pembentukan gelembung tersebut ditentukan oleh besarnya gradien suhu permukaan kontak. Semakin tinggi

gradien suhu, semakin sering gelembung terbentuk, dan dapat mencapai permukaan luar. Keadaan ini dapat tercapai pada *Fase III*. Apabila gelembung yang terbentuk semakin banyak, maka gelembung tersebut akan bergabung dan membentuk lapisan uap yang menutupi seluruh permukaan pemanas. Dengan demikian arus fluida yang menuju ke daerah tersebut mengalami hambatan. Lapisan tersebut merupakan hambatan termal yang mengurangi perpindahan fluks panas dari pemanas ke fluida. Pada kondisi inilah terjadi transisi dari pendidihan inti ke pendidihan lapis. Jika pendidihan lapis tipis mencapai keadaan stabil, maka secara keseluruhan fluida berada dalam *Fase V*.

## II.2. Medan Arus dan Medan Suhu

Meda arus di sekitar gelembung gas dalam fluida dapat dijelaskan dengan teori potensial untuk benda bulat dalam medium statis. Dalam hal ini, rotasi sebuah bulatan merupakan gerak tiga dimensi dari dipol dalam medium statis. Bentuk potensialnya dapat dimampatkan dengan mengubah dipol pada jarak  $a$  dari permukaan pemanas ke pusat gelembung menjadi sistem koordinat cairan yang berpusat di permukaan pemanas. Fungsi potensial tersebut dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\varphi = \frac{M}{4\pi} \left\{ \frac{a-z}{[r^2 + (a-z)^2]^{3/2}} + \frac{a+z}{[r^2 + (a+z)^2]^{3/2}} \right\} - \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[r^2 + (a-z)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[r^2 + (a+z)^2]^{1/2}} \right\}$$

Gradien-gradien potensial menghasilkan komponen kelajuan  $w_z$  dan  $w_r$  yang masing-masing dinyatakan sebagai berikut:

$$w_{r_{pot}} = -\frac{3Mr}{4\pi} \left\{ \frac{a-z}{[r^2 + (a-z)^2]^{5/2}} + \frac{a+z}{[r^2 + (a+z)^2]^{5/2}} \right\} + \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{r}{[r^2 + (a-z)^2]^{3/2}} + \frac{r}{[r^2 + (a+z)^2]^{3/2}} \right\}$$

dan

$$w_{z_{pot}} = -\frac{M}{4\pi} \left\{ \frac{2(a-z)^2 - r^2}{[r^2 + (a-z)^2]^{5/2}} - \frac{2(a+z)^2 - r^2}{[r^2 + (a+z)^2]^{5/2}} \right\} + \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{a+z}{[r^2 + (a+z)^2]^{3/2}} + \frac{a-z}{[r^2 + (a-z)^2]^{3/2}} \right\}$$

dimana

$$a = R + u_{\infty} \left( \tau + \frac{1}{c} (e^{-c\tau} - 1) \right)$$

$$c = 450 \text{ l/s untuk air}$$

Persamaan yang menggambarkan medan suhu merupakan suatu persamaan diferensial parsial linier orde kedua parabolik dengan tiga variabel bebas, yaitu  $r$ ,  $z$ , dan  $\tau$ .

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -w_{\theta} \frac{\partial T}{\partial r} - w_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Persamaan diferensial ini dapat diselesaikan secara

$$0 \leq r \leq 5R_b,$$

numerik dalam daerah penyelesaian  $0 \leq z \leq 10R_b,$

$$0 \leq \tau \leq \tau_w$$

Penyelesaian persamaan di atas ditentukan dengan syarat awal  $T(r, z, 0)$  pada seluruh daerah penyelesaian untuk  $\tau = 0$ . Sedangkan syarat batas harus ditentukan dalam rentang  $0 \leq \tau \leq \tau_w$ .

### Syarat Awal

Medan suhu pada permukaan pemanas ditentukan dengan persamaan

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_w \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Pada saat yang sama, konduksi panas dan konveksi alami  $q_{NCC}$  akan terdistribusi di daerah dasar gelembung. Pada sumbu simetri dan batas tengah ( $r = 5R_B$ ), tidak terjadi konduksi panas secara radial.

### Syarat Batas

Untuk menentukan suhu permukaan pemanas setelah gelembung terlepas, maka dinding pemanas digrid dengan skala  $h = 10^{-4}$  m dan  $l = 5 \cdot 10^{-5}$  detik. Dengan menerapkan persamaan fungsi Fourier dan metode beda hingga, maka suhu  $T(r, z, \tau)$  dapat diketahui dalam waktu tunda  $\tau_w$  berdasarkan kerapatan fluks panas rata-rata  $q_h$  pada bagian dasar pemanas. Kesamaan kerapatan fluks panas antara kontak fluida dengan permukaan pemanas merupakan syarat pasangan antara kedua media tersebut.

Profil suhu di dalam cairan di atas permukaan sepanjang ordinat  $r = 5R_B$  yang disebabkan oleh konduksi dan konveksi, diasumsikan stabil. Sedangkan suhu cairan di sepanjang lapis-batas termal pada batas-batas sistem  $z = 10R_B$ , mengalami pemanasan sangat tinggi sehingga  $T_\infty - T_s = 0,3^\circ K$ . Suhu fluida di sepanjang sumbu simetri di atas gelembung dianggap sama dengan  $T_\infty$ . Berdasarkan sifat simetri maka suhu tidak mengalami perubahan dalam arah  $r$ .

Untuk menentukan medan suhu di dalam fluida maka suhu batas antara gelembung harus diketahui. Penerapan metode beda hingga dapat memberikan kontur gelembung pada sistem yang digrid.

### Nondimensionalisasi

Proses nondimensionalisasi sebuah persamaan dimasukkan untuk melinierkan hubungan natar peubah sehingga operator yang berperan di dalamnya dapat dinyatakan dalam bentuk linier untuk selanjutnya diselesaikan dengan metode numerik yang sesuai. Proses nondimensionalisasi untuk persamaan

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -w_r \frac{\partial T}{\partial r} - w_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial w} = -w_r \frac{\partial T}{\partial r} - w_z \frac{\partial T}{\partial z} + K \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

dengan menyederhanakan  $\frac{\lambda}{\rho c}$  menjadi  $K$ , sebuah

konstan. Selanjutnya persamaan di atas disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial w} + M \frac{\partial T}{\partial r} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dimana faktor  $w_r - \frac{K}{r}$  telah disederhanakan menjadi faktor  $M$ .

Persamaan ini akan menjadi nondimensional setelah dikalikan dengan faktor pengali sebagai berikut:

Peubah berdimensi	Faktor pengali	Peubah tak berdimensi
$T$	$[T_o]^{-1}$	$T^*$
$r$	$[K/M]^{-1}$	$r^*$
$z$	$[K/w_z]^{-1}$	$z^*$
$\tau$	$[K/M^2]^{-1}$	$\tau^*$

Nondimensionalisasi operator diferensial parsial dilakukan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{M^2}{K} \frac{\partial}{\partial \tau^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{M}{K} \frac{\partial}{\partial r^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial r^2} = \frac{M^2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{w_z}{K} \frac{\partial}{\partial z^*}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{w_z^2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

Persamaan nondimensional yang dicari akan berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} + \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + m \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + m \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}}$$

### Perubahan Fase Orde I

Dalam sistem kesetimbangan termodinamika, kriteria stabilitas harus dipenuhi oleh persamaan dasar sistem tertentu agar keadaannya tetap homogen dan stabil. Jika kriteria tersebut tidak terpenuhi maka sistem akan terpecah menjadi dua bagian atau lebih. Kondisi seperti inilah yang disebut perubahan fase.

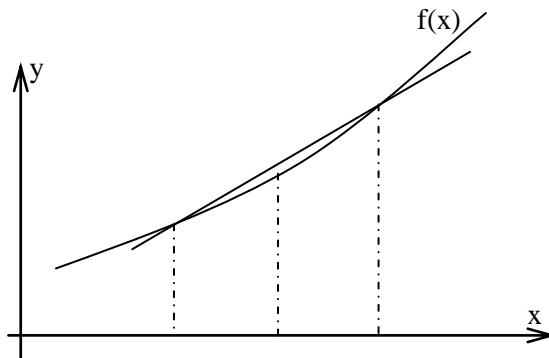
Perubahan fase dapat dijumpai dalam beberapa bentuk. Pada tekanan 1 atm dan suhu 0°C, air menjadi tidak stabil dan terpisah menjadi bagian yang padat dan bagian yang cair. Pada suhu 2,18°C helium terpisah menjadi dua fase yang ditandai dengan nama helium I dan helium II. Setiap perubahan fase yang terjadi pada sistem dapat ditandai dari salah satu keadaan berikut:

- (i). Terdapat perubahan entropi dan volume
- (ii). Turunan pertama fungsi Gibbs berubah secara tidak kontinyu.

Perubahan fase yang memenuhi persyaratan tersebut dinamakan perubahan fase orde pertama.

### Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu pendekatan numerik yang dilakukan dengan diskretisasi suatu fungsi transendental. Diskretisasi dilakukan dengan memperkurangkan nilai selisih maju (*forward difference*) atau selisih mundur (*backward difference*) dengan nilai selisih tengah (*central difference*) fungsi yang bersangkutan.



Selisih maju:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Selisih mundur:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Dengan ekspansi deret Taylor, maka didapatkan turunan pertama dan turunan kedua sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + g(h^2)$$

dan

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

## PEMBAHASAN

Persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan secara numerik adalah

$$\frac{T_{i,j+1}^* - T_{i,j}^*}{\Delta r^*} = \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{i+1,j}^* - T_{i-1,j}^*}{2\Delta r^*} + \frac{T_{i+1,j+1}^* - T_{i-1,j+1}^*}{2\Delta r^*} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{i-1,j}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i+1,j}^*}{\Delta r^{*2}} + \frac{T_{i-1,j+1}^* - 2T_{i,j+1}^* + T_{i+1,j+1}^*}{\Delta r^{*2}} \right]$$

Distribusi suhu dalam bahan pemanas adalah dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - n \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \text{ dalam arah radial, yang}$$

dinyatakan secara numerik nondimensional:

$$\frac{T_{i,j+1}^* - T_{i,j}^*}{\Delta \tau^*} = \frac{1}{2} n \left[ \frac{T_{i+1,j}^* - T_{i-1,j}^*}{2\Delta r^*} + \frac{T_{i+1,j+1}^* - T_{i-1,j+1}^*}{2\Delta r^*} \right]$$

$$= \frac{1}{2} n \left[ \frac{T_{i-1,j}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i+1,j}^*}{\Delta r^{*2}} + \frac{T_{i-1,j+1}^* - 2T_{i,j+1}^* + T_{i+1,j+1}^*}{\Delta r^{*2}} \right]$$

dan

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ dalam arah vertikal, yang secara}$$

numerik dirumuskan:

$$\frac{T_{i,j+1}^* - T_{i,j}^*}{\Delta \tau^*} = \left[ \frac{T_{i,j-1}^* - 2T_{i,j}^* + T_{i,j+1}^*}{\Delta z^{*2}} \right]$$

Setelah rumusan tersebut diperoleh maka langkah selanjutnya adalah menyusun program yang bersesuaian agar visualisasi medan suhu dapat terlihat secara fisik. Program ini disusun dalam bahasa Pascal yang terdiri atas program utama dan tiga buah program unit. Di bawah ini adalah program utama:

Program Perubahan\_fase;

```
{ $R+ }      { (+) range checking }
{ $I- }      { (-) I/O checking }
```

```
{ $M 65520, 0, 200000 } { Set MinStack:
MinHeap:MaxHeap }
Uses Crt, Grafik, Grid, Koef;
Type TNMatrik=Array[1..20,1..20] of
real;
Type TNVektor=Array[1..20] of real;
Var IterMaks, Iter, Irde, I,J,K,L :
integer;
Step, Kolom,X,Y,Ulang, Titik, dx,
dt, dtx, dty, koef1, koef2, koef3,
koef4, koef5, koef6, xystar,
tstar, interval,
intervalt, tol, syarat_awal, U,
dtxy, all, a2l, alw, a2w, wr, wz,
intervalR, intervalZ, intervalTY,
intervalTX, M : real;
Grid, hasil, koefisien, hasilX,
hasilY, hasilXY : TNMatriks;
Sulsi, konstan : TNVektor;
Error: byte;
Pol2, Pol1: Array[1..20] of real;
```

```
Begin
ClrScr;
/*****
Bagian interface input data
*****/
ClrScr;
Begin
If Ulang = 1 then
Begin
U := wr;
dtxy:=all;
dtxy:=alw;
interval:=intervalR;
M:=1;
Else
Begin
Interval:=IntervalZ;
U:=wz;
M:=sqr(wz)/sqr(K);
Dtxy:=a2l;
Dtxy:=a2w;
WriteLn;
Setkoefawal(Koefisien, orde);
Tstar:=M*sqr(alw)/dtx*intervalt;
Xystar:=(u/dtxy)*interval;
For i:=1 to orde do
Begin
J:=K+1;
Koef1:=(tstar/(2*sqr(xystar)))+(tstar/
(4*xystar))*grid[(i+1),(j-1)];
Koef2:=
(tstar/(2*sqr(xystar)))+(tstar/(4*xystar))
*grid[(i+1),(j-1)];
Koef3:=(1-
tstar/sqr(xystar))*grid[I,j];
```

```

Koef4:=(1+tstar/sqr(xystar))*grid[(i+
1),j)];
Koef5:=(tstar/2*sqr(xystar))-
tstar/(4*xystar)*grid[(I,(j+1)];
Koef6:=- (tstar/2*sqr(xystar))-
tstar/(4*xystar)*grid[(i+1),j+1)];

If(kolom=1) or (kolom=orde)
Then
Begin
If kolom=1 then
    Begin
        Koefisien[1,1]:=koef2;
        Koefisien[1,2]:=koef4;
        Konstan[1]:=koef1+koef3+koef5;
    End
Else
Begin
Koefisien[kolom],[ (kolom-1)-1=koef2;
Koefisien[orde,orde]:=koef4;
Koefisien[kolom,(kolom+1)]:=koef6;
Konstan[kolom]:=koef1+koef3+koef5;
End;
Kolom:=kolom+1;
End;
Gauss_Seidel(Dimen,koefisien,konstan,
tol,itermaks,solusi,iter,error);

If error<>0
Then
Errormsg(error);
Fory:=1 to orde do
Hasil[1,y]:=solusi[y];
End;
If ulang=1
Then hasilx:=hasil
Else
Hasily:=hasil;

For y:=1 to dimen
Do
Begin
For x:=1 to dimen
Do
Write(hasil[x,y]:7:3);
Writeln;
End;
Readln;
Clrscr;

{rutin grafik}
Inithgraphic;
For y:=1 to dimen do
Begin
For x:=1 to dimen
Do
Begin
Poll[x,1]:=x*interval;

```

```

Poll[x,2]:=hasil[x,y];
End;

Definewindow(1,0,0,xmaxglb,ymaxglb);
Defineword(1,0,0,100,100);
Definewindow(2,0,0,xmaxglb,ymaxglb);

Titik:=100;
Spline(poll,dimen,poll[1,1],poll[dien
,1],pol2,titik);
Findword(2,pol2,titik,1,1.08);

Selectwindow(2);
Setheaderon;
Drwaborder;

Setlinestyle(1);
Drawaxis(5,5,3,15,25,30,0,0,true);
Drawpolygon(poll,1,diemn,8,2,0);
delay(2000);
Setlinestyle(0);
Resetaxis;
Drawpolygon(pol2,1,titik,0,0,0);
Selectworld(1);
Selectwindow(1);

If Ulang=1
Then
Begin
Drawtextw(50,15,1,'
:') + floattostring(syarat_awal));
Drawtextw(50,20,1,'konduktivitas
termal'): 'floattostring(dtx));
Drawtextw(50,25,1,'interval        jarak
dalam        arah        radial        (mm):
'floattostring(interval));
End.

```

## HASIL

Data pengukuran langsung secara manual dalam penelitian ini digunakan sebagai nilai-nilai awal dan syarat batas yang diperlukan untuk menggambarkan medan suhu secara keseluruhan dalam sistem. Data-data tersebut adalah:

Temperatur permukaan pemanas	: 92°C
Konduktivitas termal fluida	: 56,3 W°C/m
Konduktivitas termal tembaga	: 0,40 W°C/m
Interval grid sistem	: 10 <sup>-4</sup> m
Interval waktu	: 5.10 <sup>-5</sup> m
Toleransi penentuan solusi	: 0,01
Iterasi maksimum	: 4
Orde grid	: 20

### KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, dapat ditunjukkan adanya gradien suhu di sekitar gelembung gas. Gradien suhu dapat dipresentasikan secara grafis melalui bantuan program Turbo Pascal, dan sekaligus memperlihatkan terjadinya medan suhu pada perubahan fase orde II. Medan suhu mulai terbentuk pada saat suhu permukaan pemanas menunjukkan  $92^{\circ}\text{C}$  ( $\tau = 37$  detik).

### DAFTAR PUSTAKA

- Callen, H.B., 1980. *Thermodynamics* 16<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons Inc, USA, pp. 1, 146-308.
- Churchill, Ruel V, and James Ward Brown, 1987, *Fourier Series and Boundary Value Problem* 4<sup>th</sup> edition, McGraw Hill Book Company, Singapore, pp. 55-96.
- Dash, J.G., 1976., *Statistical Thermodynamics of Physisorption*, The National Science Foundation, USA, pp. 143-153.
- Fermi, Enrico. 1986, *Notes on Thermodynamics and Statistics*, 6th edition, The University of Chicago Press, pp.3-4.
- Fortin, Michel, and Andre Fortin, 1989, *A New Approach for The Finite Difference Method Simulation of Viscoelastic Flows*, Elsevier Science Publishing Corporation, London, pp. 10, 40.
- Holman, J.P., 1984, *Heat Transfer*, 4th editio, Terjemahan E. Jasfii, Erlangga, Jakarta, pp. 415-437.
- Smith, G.D., 1979, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, pp. 11-55.